

## Aufgaben zur Binomialverteilung

Bei den folgenden Aufgaben soll immer von folgender Situation ausgegangen werden: Ein Glücksrad wird gedreht. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer liegt bei 40% bzw. 0,4.  
Beantworte folgende Fragen:

### 1. Grundaufgabe mit Formel und Tabelle beantworten. $P(X = k)$

Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln genau 3 Treffer kommen? Lies das Ergebnis in der Tabelle ab.

$$B_{n;p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

| n | k | p=0,02 | 0,03 | 0,05 | 0,10 | $\frac{1}{6}$ | 0,20 | 0,25 | 0,30 | $\frac{1}{3}$ | 0,40 | 0,50     |   |   |
|---|---|--------|------|------|------|---------------|------|------|------|---------------|------|----------|---|---|
| 5 | 0 | 0,9039 | 8587 | 7738 | 5905 | 4019          | 3277 | 2373 | 1681 | 1317          | 0778 | 0313     | 5 |   |
|   | 1 | 0922   | 1328 | 2036 | 3281 | 4019          | 4096 | 3955 | 3602 | 3292          | 2592 | 1563     | 4 |   |
|   | 2 | 0038   | 0082 | 0214 | 0729 | 1608          | 2048 | 2637 | 3087 | 3292          | 3456 | 3125     | 3 |   |
|   | 3 | 0001   | 0003 | 0011 | 0081 | 0322          | 0512 | 0879 | 1323 | 1646          | 2304 | 3125     | 2 |   |
|   | 4 |        |      |      | 0005 | 0032          | 0064 | 0146 | 0284 | 0412          | 0768 | 1563     | 1 |   |
|   | 5 |        |      |      |      | 0001          | 0003 | 0010 | 0024 | 0041          | 0102 | 0313     | 0 | 5 |
|   |   | 0,98   | 0,97 | 0,95 | 0,90 | $\frac{5}{6}$ | 0,80 | 0,75 | 0,70 | $\frac{2}{3}$ | 0,60 | 0,50 = p | k | n |

2.  $P(X \leq k)$  Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln höchstens einmal ein Treffer kommt?

3.  $P(X < k)$  Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln weniger als 2 Mal Treffer kommt?

4.  $P(X \geq k)$  Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln 4 oder mehr als 4 Mal Treffer kommt?

5.  $P(k_1 \leq X \leq k_2)$  Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln zwischen 2 und 4 Mal Treffer kommt?

6. **Arbeiten mit der Gegenwahrscheinlichkeit** Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln mehr als 1 Treffer kommt?

### Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

Die folgende Tabelle gibt schon die aufaddierten Wahrscheinlichkeiten an. Man kann also direkt  $P(X \leq k)$  ablesen. Statt  $B(N, p, k)$  schreibt man  $F(n, p, k)$ .

**Binomialverteilung**  $F_{n;p}(k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$   
**Summenverteilung**

|   |   | p      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |  |   |
|---|---|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|--|---|
| n | k | 0,02   | 0,03 | 0,05 | 0,10 | 1/6  | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 1/3  | 0,40 | 0,50 |   |  | n |
| 5 | 0 | 0,9039 | 8587 | 7738 | 5905 | 4019 | 3277 | 2373 | 1681 | 1317 | 0778 | 0313 | 4 |  | 5 |
|   | 1 | 9962   | 9915 | 9774 | 9185 | 8038 | 7373 | 6328 | 5282 | 4609 | 3370 | 1875 | 3 |  |   |
|   | 2 | 9999   | 9997 | 9988 | 9914 | 9645 | 9421 | 8965 | 9369 | 7901 | 6826 | 5000 | 2 |  |   |
|   | 3 |        |      |      | 9995 | 9967 | 9933 | 9844 | 9692 | 9547 | 9130 | 8125 | 1 |  |   |
|   | 4 |        |      |      |      | 9999 | 9997 | 9990 | 9976 | 9959 | 9898 | 9688 | 0 |  |   |

Überprüfe die Ergebnisse von Aufgabe 2 und 3 anhand dieser Tabelle!

## Lösungen

Aufgabe 1 Grundaufgabe mit Formel, Taschenrechner und Tabelle beantworten.

Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln genau 3 Treffer kommen. Stelle die Formel auf, berechne diese mit dem Taschenrechner. Überprüfe dein Ergebnis mit dem Taschenrechner mit der Funktion BinomialPdf. Lies das Ergebnis in der Tabelle ab.

Lösung:  $P(X=3) = 0,2304$  entspricht 23,04 Prozent

Rechenwege:

1. Formel: Gesucht  $P(X=3) = B(5; 0,4; 3) = \binom{5}{3} \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^2 = \binom{5}{3}$  berechnet man mit  $\text{ncr}(5,3)$
2. Funktion BinomialPdf. Öffne eine Calculatorseite. Dann auf [Menü], => [6: Statistik] => [5: Verteilungen] => [A: Binomial PDF] oder direkt eingeben:  $\text{Binompdf}(5,0,4,3) = 0,2304$
3. Aus der Tabelle entnehmen:

Gesucht ist also der Wert  $B_{n,p}(k)$  mit  $B_{5,0,5}(3)$ . Dies liest man anhand der folgenden Tabelle

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ ab:}$$

| n | k | p=0,02 | 0,03 | 0,05 | 0,10 | $\frac{1}{6}$ | 0,20 | 0,25 | 0,30 | $\frac{1}{3}$ | 0,40 | 0,50     |   |   |
|---|---|--------|------|------|------|---------------|------|------|------|---------------|------|----------|---|---|
| 5 | 0 | 0,9039 | 8587 | 7738 | 5905 | 4019          | 3277 | 2373 | 1681 | 1317          | 0778 | 0313     | 5 |   |
|   | 1 | 0922   | 1328 | 2036 | 3281 | 4019          | 4096 | 3955 | 3602 | 3292          | 2592 | 1563     | 4 |   |
|   | 2 | 0038   | 0082 | 0214 | 0729 | 1608          | 2048 | 2637 | 3087 | 3292          | 3456 | 3125     | 3 |   |
|   | 3 | 0001   | 0003 | 0011 | 0081 | 0322          | 0512 | 0879 | 1323 | 1646          | 2304 | 3125     | 2 |   |
|   | 4 |        |      |      | 0005 | 0032          | 0064 | 0146 | 0284 | 0412          | 0768 | 1563     | 1 |   |
|   | 5 |        |      |      |      | 0001          | 0003 | 0010 | 0024 | 0041          | 0102 | 0313     | 0 | 5 |
|   |   | 0,98   | 0,97 | 0,95 | 0,90 | $\frac{5}{6}$ | 0,80 | 0,75 | 0,70 | $\frac{2}{3}$ | 0,60 | 0,50 = p | k | n |

Aufgrund der Gegenwahrscheinlichkeiten, kann man Werte von  $p > 0,5$  anhand des grün unterlegten Bereichs ablesen.

Aufgabe 2: Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln höchstens einmal ein Treffer kommt?

Lösung: Es ist also gefragt:  $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,078 + 0,26 = 0,34$

Aufgabe 3: Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln weniger als 2 Mal Treffer kommt?

Lösung: Es ist also gefragt:  $P(X < 2) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,078 + 0,26 = 0,34$

Aufgabe 4: Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln 4 oder mehr als 4 Mal Treffer kommt?

Lösung: Es ist also gefragt:  $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) = 0,087$

Aufgabe 5:

Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln zwischen 2 und 4 Mal Treffer kommt?

Lösung: Es ist also gefragt:  $P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0,65$

Aufgabe 6:

Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 5 Würfeln mehr als 1 Treffer kommt?

Lösung:  $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - 0,34 = 0,66$

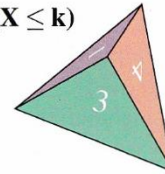
## Übungen

### 3. Bestimmung einer Punktwahrscheinlichkeit: $P(X = k)$

51,4 % aller Neugeborenen sind Knaben. Eine Familie hat sechs Kinder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau drei Knaben und drei Mädchen sind?

### 4. Bestimmung einer linksseitigen Intervallwahrscheinlichkeit: $P(X \leq k)$

Ein Tetraederwürfel trägt die Zahlen 1 bis 4. Wird er geworfen, so zählt die unten liegende Zahl. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim fünffachen Werfen des Würfels höchstens zweimal die Zahl 2 zu werfen?



### 5. Bestimmung einer rechtsseitigen Intervallwahrscheinlichkeit: $P(X \geq k)$

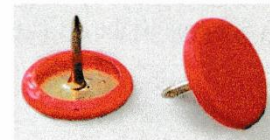
Ein Biathlet trifft die Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Er gibt insgesamt zehn Schüsse ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mindestens achtmal?

### 6. Bestimmung einer Intervallwahrscheinlichkeit: $P(k \leq X \leq m)$

Aus einer Urne mit zehn roten und fünf weißen Kugeln werden acht Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man vier bis sechs rote Kugeln?

### 7. Anwendung der Formel für das Gegenereignis: $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$

Wirft man einen Reißnagel, so kommt er in 60 % der Fälle in Kopflage und in 40 % der Fälle in Seitenlage zur Ruhe. Jemand wirft zehn dieser Reißnägel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er mehr als dreimal die Seitenlage?



### 8. Bestimmung einer Mindestanzahl von Versuchen

Wie oft muss ein Würfel mindestens geworfen werden, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Sechs fallen soll?

### 9. Nach Angaben der Post erreichen 90 % aller Inlandbriefe den Empfänger am nächsten Tag. Johanna verschickt acht Einladungen zu ihrem Geburtstag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- sind alle Briefe am nächsten Tag zugestellt?
- sind mindestens sechs Briefe am nächsten Tag zugestellt?

### 10. Max gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$ beim Squash gegen Karl.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Max genau sechs von zehn Spielen?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er mindestens sechs von zehn Spielen?
- Wie viele Spiele sind mindestens erforderlich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Karl mindestens ein Spiel gewinnt, mindestens 99 % betragen soll?





1.  $n = 6$ ;  $k = 4$ ;  $p = \frac{2}{3}$  (rote Kugel)

$$P(X=4) = B(6; \frac{2}{3}; 4) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 15 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{9} = \frac{80}{243} \approx 0,3292$$

2.  $n = 13$ ;  $k \geq 10$ ;  $p = \frac{1}{3}$

$$P(X \geq 10) = P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) + P(X=13) \\ = \binom{13}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{13}{11} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{13}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{13} = \frac{2627}{3^{13}} \approx 0,00165$$

3.  $n = 6$ ;  $k = 3$ ;  $p = 0,514$  (Knabengeburt)

$$P(X=3) = \binom{6}{3} \cdot 0,514^3 \cdot 0,486^3 \approx 0,3118$$

4.  $n = 5$ ;  $k \leq 2$ ;  $p = \frac{1}{4}$

$$P(X \leq 2) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{918}{1024} \approx 0,8965$$

5.  $n = 10$ ;  $k \geq 8$ ;  $p = 0,8$  (Scheibe getroffen)

$$P(X \geq 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 + 0,8^{10} \approx 0,6778$$

6.  $n = 8$ ;  $k = 4, 5, 6$ ;  $p = \frac{2}{3}$  (rote Kugel)

$$P(4 \leq X \leq 6) = \binom{8}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4704}{3^8} \approx 0,7170$$

7.  $n = 10$ ;  $k > 3$ ;  $p = 0,4$  (Seitenlage)

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)) \\ = 1 - (0,6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^8 + \binom{10}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^7) \approx 0,6178$$

8.  $p = \frac{1}{6}$ ;  $P(\text{keine 6 bei } n \text{ Würfeln}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$P(\text{mindestens eine 6 bei } n \text{ Würfeln}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,1, \quad n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln \frac{5}{6}} \approx 12,63$$

Der Würfel muss mindestens 13-mal geworfen werden.

9. E: "Brief am nächsten Tag zugestellt",  $P(E) = 0,9$ ,  $n = 8$

a)  $k = 8$ :  $B(8; 0,9; 8) = 0,9^8 = 0,4305$

b)  $k = 6, 7, 8$

$$B(8; 0,9; 6) + B(8; 0,9; 7) + B(8; 0,9; 8) = 28 \cdot 0,9^6 \cdot 0,1^2 + 8 \cdot 0,9^7 \cdot 0,1 + 0,9^8 = 0,9619$$

10. a)  $n = 10$ ;  $k = 6$ ;  $p = \frac{2}{3}$  (Max gewinnt)

$$P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{13440}{3^{10}} \approx 0,2276$$

10. b)  $n = 10$ ;  $k \geq 6$ ;  $p = \frac{2}{3}$

$$P(X \geq 6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\ = \frac{46464}{59049} \approx 0,7869$$

- c)  $P(\text{Karl verliert alle } n \text{ Spiele}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$P(\text{Karl gewinnt mindestens eins von } n \text{ Spielen}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,01, \quad n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln \frac{2}{3}} \approx 11,36$$

Mindestens 12 Partien sind zu spielen.